PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE GRADO
Curso académico 2026-27

Titulación TFG: Todos, incluidos dobles grados.

Título del trabajo: Introducción a la geometría métrica.

Metodología:

La geometría métrica estudia las propiedades geométricas de los espacios a partir de la noción de distancia. Este enfoque permite estudiar nociones geométricas, como la longitud de curvas y la existencia de caminos minimizantes, en espacios métricos que no necesariamente poseen una estructura diferenciable; permite tratar en un mismo marco superficies, grafos o espacios más generales con singularidades. A partir del libro *A Course in Metric Geometry*, de Burago, Burago e Ivanov, se proponen realizar hasta 3 TFGs cuyo contenido se adaptaría a los intereses y conocimientos del alumno. A modo de ejemplo, desarrollo a continuación 3 posibles líneas de trabajo bien diferenciadas:

1. Espacios de longitud (*length spaces*)

En un espacio de longitud, la distancia entre dos puntos es el ínfimo de las longitudes de los caminos que los unen. El trabajo estudiará la relación entre distancia y longitud, así como las condiciones que garantizan la existencia de caminos minimizantes. Se analizarán ejemplos como dominios del plano, grafos métricos y superficies, prestando atención al papel de la completitud y la compacidad local. Como resultado central, podría abordarse una versión del teorema de Hopf–Rinow para espacios de longitud. La referencia principal será el capítulo 2. Otra posible línea, según la evolución del trabajo, podría ser el caso particular de los espacio de curvatura acotada.

2. Distancias y convergencia en el espacio de espacios métricos

¿En qué sentido dos espacios métricos pueden estar próximos, aunque sus puntos pertenezcan a conjuntos diferentes? Este trabajo introducirá la distancia de Gromov–Hausdorff, que permite comparar espacios métricos compactos considerados salvo isometría. Se estudiarán su definición y sus propiedades básicas, acompañadas de ejemplos de aproximación y colapso, como espacios finitos que aproximan un intervalo o toros que convergen a una circunferencia. Según el alcance del trabajo, se podrá incluir el teorema de precompacidad de Gromov. La referencia principal será el capítulo 7.

3. Introducción a la geometría subriemanniana

La geometría subriemanniana estudia espacios en los que solo se permite desplazarse siguiendo determinadas direcciones en cada punto. La distancia se define mediante las longitudes de los caminos compatibles con esta restricción, dando lugar a geometrías diferentes de la euclídea. El trabajo se centrará en el grupo de Heisenberg como ejemplo fundamental, estudiando sus caminos admisibles, su distancia y sus dilataciones. Este modelo permitirá explorar cómo las restricciones de movimiento influyen en la geometría y en la dimensión de Hausdorff. La referencia principal será la sección 5.4, junto con las nociones previas necesarias.

En cuanto a la dinámica de trabajo, consistirá en la lectura y trabajo personal del alumno en el texto, ejercicios y ejemplos. Entrevistas concertadas con el profesor para resolver dudas y motivar. En caso de haber varios alumnos, la introducción al tema podrían trabajarla en conjunto, pero después necesariamente se bifurcarían los temas.

Referencias:

D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, A course in Metric Geometry. Graduate Texts in Mathematics. American Mathematical Society.

Profesor/es: María Pe Pereira

Requisitos: Tener un nivel razonable de Topología Elemental y Geometría diferencial de Curvas y Superficies que permita tener un lenguaje común. El conocimiento en Geometría Riemanniana podría facilitar algunas otras posibles líneas de trabajo.

Plazas: 3

Modalidad: Específico

Alumno(s) [TFG particular]: